

Lösungsblatt

Stunde 5 · Quadratische Ergänzung I: von der Normalform zur Scheitelpunktform · zur Selbstkontrolle

Mitmachen

a) $f(x) = x^2 - 2x + 5$

Gegeben: $f(x) = x^2 - 2x + 5$ **Gesucht:** Scheitelpunktform, S

Ansatz: $p = -2$, also $(-1)^2 = 1$ ergänzen

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 5 && | + 1 - 1 \text{ ergänzen} \\ &= x^2 - 2x + 1 - 1 + 5 && | \text{ binomische Formel} \\ &= (x - 1)^2 + 4 \end{aligned}$$

$$f(x) = (x - 1)^2 + 4 \Rightarrow d = 1 \text{ und } e = 4 \Rightarrow S(1 | 4)$$

Antwort: $S(1 | 4)$. Probe: $(x - 1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 1 + 4 = x^2 - 2x + 5$.

b) $g(x) = x^2 + 10x + 21$

Gegeben: $g(x) = x^2 + 10x + 21$ **Gesucht:** Scheitelpunktform, S

Ansatz: $p = 10$, also $5^2 = 25$ ergänzen

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 10x + 21 && | + 25 - 25 \text{ ergänzen} \\ &= x^2 + 10x + 25 - 25 + 21 && | \text{ binomische Formel} \\ &= (x + 5)^2 - 4 \end{aligned}$$

$$g(x) = (x + 5)^2 - 4 \Rightarrow d = -5 \text{ und } e = -4 \Rightarrow S(-5 | -4)$$

Antwort: $S(-5 | -4)$. Probe: $(x + 5)^2 - 4 = x^2 + 10x + 25 - 4 = x^2 + 10x + 21$.

Übungen

1 Zum Quadrat ergänzen

Gegeben: vier Terme $x^2 + px$ **Gesucht:** fehlende Zahl $(p/2)^2$ und das Binom

Ansatz: Hälfte von p quadrieren

a) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

b) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

c) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

d) $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

2 Scheitelpunktform und S

Gegeben: drei Funktionen in Normalform **Gesucht:** Scheitelpunktform, S

Ansatz: $(p/2)^2$ ergänzen, binomische Formel, zusammenfassen

a) $f(x) = x^2 - 8x + 12$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 8x + 12 && | + 16 - 16 \text{ ergänzen} \\ &= x^2 - 8x + 16 - 16 + 12 && | \text{ binomische Formel} \\ &= (x - 4)^2 - 4 \end{aligned}$$

$$f(x) = (x - 4)^2 - 4 \Rightarrow d = 4 \text{ und } e = -4 \Rightarrow S(4 | -4)$$

b) $f(x) = x^2 + 6x + 2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x + 2 && | + 9 - 9 \text{ ergänzen} \\ &= x^2 + 6x + 9 - 9 + 2 && | \text{ binomische Formel} \\ &= (x + 3)^2 - 7 \end{aligned}$$

$$f(x) = (x + 3)^2 - 7 \Rightarrow d = -3 \text{ und } e = -7 \Rightarrow S(-3 | -7)$$

c) $f(x) = x^2 - 3x + 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3x + 1 && | + 2,25 - 2,25 \text{ ergänzen} \\ &= x^2 - 3x + 2,25 - 2,25 + 1 && | \text{ binomische Formel} \\ &= (x - 1,5)^2 - 1,25 \end{aligned}$$

$$f(x) = (x - 1,5)^2 - 1,25 \Rightarrow d = 1,5 \text{ und } e = -1,25 \Rightarrow S(1,5 | -1,25)$$

Antwort: a) $S(4 | -4)$; b) $S(-3 | -7)$; c) $S(1,5 | -1,25)$ – auch bei ungeradem p funktioniert das Verfahren.

3 $f(x) = x^2 - 6x + 9$

Gegeben: $f(x) = x^2 - 6x + 9$ **Gesucht:** a) Scheitelpunktform, S; b) Besonderheit, Skizze

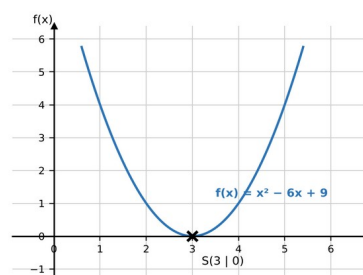
Ansatz: $(-3)^2 = 9$ ergänzen – die Ergänzung ist schon da

a) **Scheitelpunktform:**

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 9 && | \text{ binomische Formel} \\ &= (x - 3)^2 + 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = (x - 3)^2 \Rightarrow d = 3 \text{ und } e = 0 \Rightarrow S(3 | 0)$$

b) Der Scheitelpunkt liegt auf der x -Achse: Der Graph berührt die x -Achse in $S(3 | 0)$, schneidet sie aber nicht. $x^2 - 6x + 9$ ist selbst schon ein vollständiges Quadrat.



4 Fehler finden

Gegeben: Leas Rechnung $(x - 12)^2 + 37$ **Gesucht:** Fehler, richtige Scheitelpunktform

Ansatz: Hälfte von p nehmen, Ergänzung wieder abziehen

Fehler: In die Klammer gehört die **Hälfte** von p , also -6 , nicht -12 . Außerdem muss die Ergänzung 36 wieder abgezogen werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 12x + 37 && | + 36 - 36 \text{ ergänzen} \\ &= x^2 - 12x + 36 - 36 + 37 && | \text{ binomische Formel} \\ &= (x - 6)^2 + 1 \end{aligned}$$

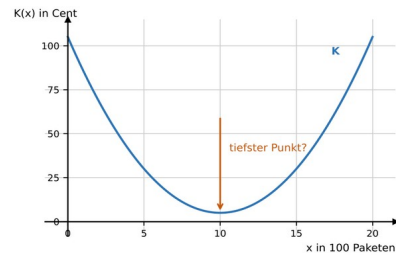
Probe: $(x - 6)^2 + 1 = x^2 - 12x + 36 + 1 = x^2 - 12x + 37$. Leas Term ergibt dagegen $x^2 - 24x + 181$.

Antwort: $f(x) = (x - 6)^2 + 1$, $S(6 | 1)$.

5 Kosten je Paket: $K(x) = x^2 - 20x + 105$ **Gegeben:** $K(x) = x^2 - 20x + 105$ (x in 100 Paketen, K in Cent) **Gesucht:** a) Skizze, b) S, c) günstigste Paketzahl und Kosten**Ansatz:** quadratisch ergänzen mit $(-10)^2 = 100$ **b) Scheitelpunkt bestimmen:**

$$\begin{aligned}
 K(x) &= x^2 - 20x + 105 && | +100 - 100 \text{ ergänzen} \\
 &= x^2 - 20x + 100 - 100 + 105 && | \text{ binomische Formel} \\
 &= (x - 10)^2 + 5
 \end{aligned}$$

$$K(x) = (x - 10)^2 + 5 \Rightarrow d = 10 \text{ und } e = 5 \Rightarrow S(10 | 5)$$

**Antwort:** c) Bei 1000 Paketen pro Tag ($x = 10$) sind die Kosten je Paket mit 5 Cent am geringsten.**6 $f(x) = x^2 - 2x - 8$** **Gegeben:** $f(x) = x^2 - 2x - 8$ **Gesucht:** a) S, b) $f(-2)$ und $f(4)$, c) Begründung**Ansatz:** a) $(-1)^2 = 1$ ergänzen; b) einsetzen; c) Lage von S und Öffnung**a) Scheitelpunkt:**

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 - 2x - 8 && | +1 - 1 \text{ ergänzen} \\
 &= x^2 - 2x + 1 - 1 - 8 && | \text{ binomische Formel} \\
 &= (x - 1)^2 - 9
 \end{aligned}$$

$$f(x) = (x - 1)^2 - 9 \Rightarrow d = 1 \text{ und } e = -9 \Rightarrow S(1 | -9)$$

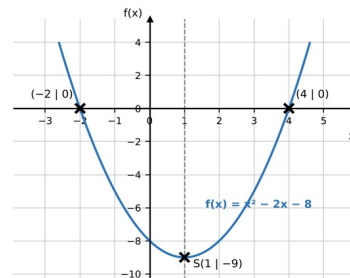
b) $f(-2)$ und $f(4)$ berechnen:

$$f(x) = x^2 - 2x - 8 \quad | x = -2 \text{ einsetzen}$$

$$\begin{aligned}
 f(-2) &= (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 8 \\
 &= 4 + 4 - 8 = 0
 \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 8 \quad | x = 4 \text{ einsetzen}$$

$$\begin{aligned}
 f(4) &= 4^2 - 2 \cdot 4 - 8 \\
 &= 16 - 8 - 8 = 0
 \end{aligned}$$

b) Beide Funktionswerte sind 0: $(-2 | 0)$ und $(4 | 0)$ sind die Schnittpunkte mit der x -Achse. Sie liegen symmetrisch zu $x = 1$.c) $S(1 | -9)$ liegt unterhalb der x -Achse, und die Parabel ist nach oben geöffnet ($a = 1$). Der Graph steigt also links und rechts von S über die x -Achse – genau zwei Schnittpunkte.