KOPERNIKUS OBERSCHULE	**Mathematik 11**	Name: Datum:

Quadratische Ergänzung II: von der allgemeinen Form zur Scheitelpunktform

Merke: Quadratische Ergänzung mit Faktor a (a ≠ 1)

Aus der **allgemeinen Form f(x) = ax² + bx + c** wird die **Scheitelpunktform f(x) = a(x − d)² + e** – in fünf Schritten:

1. a aus den x-Termen ausklammern: $ax^2 + bx = a(x^2 + px)$ mit p = b : a.
2. In der Klammer $(p/2)^2$ addieren **und** sofort wieder subtrahieren.
3. Binomische Formel in der Klammer anwenden.
4. Ausmultiplizieren: das abgezogene $(p/2)^2$ mit a multiplizieren und aus der Klammer holen.
5. Restliche Zahlen zusammenfassen, S(d | e) ablesen.

Vorsicht: Auch das abgezogene $(p/2)^2$ wird mit a multipliziert. Probe: Klammer wieder auflösen.

Beispiele

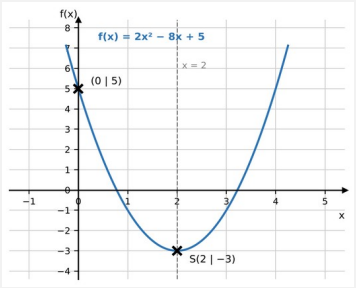
B1 Allgemeine Form → Scheitelpunktform

Aufgabe: Bestimmen Sie den Scheitelpunkt von $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$.
Gegeben: $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ **Gesucht:** Scheitelpunktform, S
Ansatz: 2 ausklammern, dann in der Klammer $(-4/2)^2 = 4$ ergänzen

$f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ | 2 ausklammern
$= 2(x^2 - 4x) + 5$ | + 4 − 4 ergänzen
$= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 5$ | binomische Formel
$= 2((x - 2)^2 - 4) + 5$ | ausmultiplizieren
$= 2(x - 2)^2 - 8 + 5$ | zusammenfassen
$= 2(x - 2)^2 - 3$

$f(x) = 2(x - 2)^2 - 3 \Rightarrow d = 2$ und $e = -3 \Rightarrow S(2 \mid -3)$

Antwort: S(2 | −3). Probe: $2(x - 2)^2 - 3 = 2x^2 - 8x + 5$ – stimmt.



B2 Ballwurf – wie hoch fliegt der Ball?

Aufgabe: Die Flugbahn eines Balls wird beschrieben durch $f(x) = -0{,}5x^2 + 4x + 1$ (x: waagerechte Entfernung vom Abwurf in m, f(x): Höhe in m).
a) Wie weit vom Abwurf entfernt ist der Ball am höchsten, und wie hoch ist er dann?
b) Wie hoch ist der Ball 2 m nach dem Abwurf?

Gegeben: $f(x) = -0{,}5x^2 + 4x + 1$ **Gesucht:** a) S (höchster Punkt), b) f(2)
Ansatz: a) −0,5 ausklammern (4x : (−0,5) = −8x), dann $(-8/2)^2 = 16$ ergänzen; b) x = 2 einsetzen

a) Scheitelpunkt bestimmen:

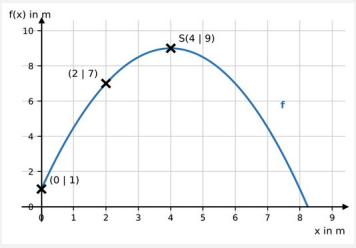
$f(x) = -0{,}5x^2 + 4x + 1$ | −0,5 ausklammern
$= -0{,}5(x^2 - 8x) + 1$ | + 16 − 16 ergänzen
$= -0{,}5(x^2 - 8x + 16 - 16) + 1$ | binomische Formel
$= -0{,}5((x - 4)^2 - 16) + 1$ | ausmultiplizieren
$= -0{,}5(x - 4)^2 + 8 + 1$ | zusammenfassen
$= -0{,}5(x - 4)^2 + 9$

$f(x) = -0{,}5(x - 4)^2 + 9 \Rightarrow d = 4$ und $e = 9 \Rightarrow S(4 \mid 9)$

b) f(2) berechnen:

$f(x) = -0{,}5(x - 4)^2 + 9$ | x = 2 einsetzen
$f(2) = -0{,}5 \cdot (2 - 4)^2 + 9$
$= -0{,}5 \cdot 4 + 9 = 7$

Antwort: a) 4 m nach dem Abwurf ist der Ball mit 9 m am höchsten. b) 2 m nach dem Abwurf ist der Ball 7 m hoch.



Mitmachen

a) Bestimmen Sie den Scheitelpunkt von $f(x) = 3x^2 + 12x + 7$.

b) Bestimmen Sie den Scheitelpunkt von $g(x) = -x^2 + 6x - 4$.

Tipps&Lösungen

Übungen

★ **1** Klammern Sie den Faktor vor x^2 aus.

a) $2x^2 + 12x = 2(x^2 + ___)$ b) $3x^2 - 6x$ c) $-x^2 + 4x$ d) $0{,}5x^2 - 3x$

★ **2** Bestimmen Sie die Scheitelpunktform und den Scheitelpunkt S.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ b) $f(x) = 3x^2 - 18x + 20$ c) $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$

★★ **3** Tim hat so gerechnet:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 12x + 10 \\ &= 2(x^2 - 6x + 9 - 9) + 10 \\ &= 2(x - 3)^2 - 9 + 10 \\ &= 2(x - 3)^2 + 1 \end{aligned}$$

Finden Sie den Fehler, rechnen Sie richtig und machen Sie die Probe.

★★ **4** Beim Kugelstoßen wird die Flugbahn der Kugel beschrieben durch $f(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}8x + 2$ (x: waagerechte Entfernung vom Abstoß in m, f(x): Höhe in m).

a) Fertigen Sie eine Skizze an.
b) Bestimmen Sie den höchsten Punkt der Flugbahn.
c) In welcher Höhe verlässt die Kugel die Hand?

★★ **5** Gegeben ist $f(x) = 2x^2 + 8x + 3$. Prüfen Sie durch quadratische Ergänzung, welche der Funktionen $g(x) = 2(x + 2)^2 - 5$ und $h(x) = 2(x + 2)^2 + 3$ mit f übereinstimmt.

★★★ **6** Gegeben ist $f(x) = 2x^2 - 8x + c$.

a) Bestimmen Sie den Scheitelpunkt S in Abhängigkeit von c.
b) Für welches c liegt S auf der x-Achse?
c) Für welche c schneidet der Graph die x-Achse nicht? Begründen Sie.