Lösungsblatt

Stunde 6 · Quadratische Ergänzung II: von der allgemeinen Form zur Scheitelpunktform · zur Selbstkontrolle

Mitmachen

a) $f(x) = 3x^2 + 12x + 7$

Gegeben: $f(x) = 3x^2 + 12x + 7$ **Gesucht:** Scheitelpunktform, S
Ansatz: 3 ausklammern, dann $(4/2)^2 = 4$ ergänzen

$f(x) = 3x^2 + 12x + 7$	| 3 ausklammern
$= 3(x^2 + 4x) + 7$	| + 4 − 4 ergänzen
$= 3(x^2 + 4x + 4 - 4) + 7$	| binomische Formel
$= 3((x + 2)^2 - 4) + 7$	| ausmultiplizieren
$= 3(x + 2)^2 - 12 + 7$	| zusammenfassen
$= 3(x + 2)^2 - 5$	

$f(x) = 3(x + 2)^2 - 5 \Rightarrow d = -2$ und $e = -5 \Rightarrow S(-2 \mid -5)$
Antwort: $S(-2 \mid -5)$. Probe: $3(x + 2)^2 - 5 = 3x^2 + 12x + 7$.

b) $g(x) = -x^2 + 6x - 4$

Gegeben: $g(x) = -x^2 + 6x - 4$ **Gesucht:** Scheitelpunktform, S
Ansatz: −1 ausklammern, dann $(-6/2)^2 = 9$ ergänzen

$g(x) = -x^2 + 6x - 4$	| −1 ausklammern
$= -(x^2 - 6x) - 4$	| + 9 − 9 ergänzen
$= -(x^2 - 6x + 9 - 9) - 4$	| binomische Formel
$= -((x - 3)^2 - 9) - 4$	| ausmultiplizieren
$= -(x - 3)^2 + 9 - 4$	| zusammenfassen
$= -(x - 3)^2 + 5$	

$g(x) = -(x - 3)^2 + 5 \Rightarrow d = 3$ und $e = 5 \Rightarrow S(3 \mid 5)$
Antwort: $S(3 \mid 5)$. Probe: $-(x - 3)^2 + 5 = -x^2 + 6x - 4$.

Übungen

1 Faktor vor x^2 ausklammern

Gegeben: vier Terme $ax^2 + bx$ **Gesucht:** $a(x^2 + px)$
Ansatz: jeden Summanden durch a teilen: $p = b : a$

a) $2x^2 + 12x = 2(x^2 + 6x)$
b) $3x^2 - 6x = 3(x^2 - 2x)$
c) $-x^2 + 4x = -(x^2 - 4x)$
d) $0{,}5x^2 - 3x = 0{,}5(x^2 - 6x)$

2 Scheitelpunktform und S

Gegeben: drei Funktionen in allgemeiner Form **Gesucht:** Scheitelpunktform, S
Ansatz: a ausklammern, in der Klammer ergänzen, binomische Formel, ausmultiplizieren, zusammenfassen

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$:

$f(x) = 2x^2 + 4x - 1$	| 2 ausklammern
$= 2(x^2 + 2x) - 1$	| + 1 − 1 ergänzen
$= 2(x^2 + 2x + 1 - 1) - 1$	| binomische Formel
$= 2((x + 1)^2 - 1) - 1$	| ausmultiplizieren
$= 2(x + 1)^2 - 2 - 1$	| zusammenfassen
$= 2(x + 1)^2 - 3$	

$f(x) = 2(x + 1)^2 - 3 \Rightarrow d = -1$ und $e = -3 \Rightarrow S(-1 \mid -3)$

b) $f(x) = 3x^2 - 18x + 20$:

$f(x) = 3x^2 - 18x + 20$	| 3 ausklammern
$= 3(x^2 - 6x) + 20$	| + 9 − 9 ergänzen
$= 3(x^2 - 6x + 9 - 9) + 20$	| binomische Formel
$= 3((x - 3)^2 - 9) + 20$	| ausmultiplizieren
$= 3(x - 3)^2 - 27 + 20$	| zusammenfassen
$= 3(x - 3)^2 - 7$	

$f(x) = 3(x - 3)^2 - 7 \Rightarrow d = 3$ und $e = -7 \Rightarrow S(3 \mid -7)$

c) $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$:

$f(x) = -2x^2 + 8x - 3$	| −2 ausklammern
$= -2(x^2 - 4x) - 3$	| + 4 − 4 ergänzen
$= -2(x^2 - 4x + 4 - 4) - 3$	| binomische Formel
$= -2((x - 2)^2 - 4) - 3$	| ausmultiplizieren
$= -2(x - 2)^2 + 8 - 3$	| zusammenfassen
$= -2(x - 2)^2 + 5$	

$f(x) = -2(x - 2)^2 + 5 \Rightarrow d = 2$ und $e = 5 \Rightarrow S(2 \mid 5)$
Antwort: a) $S(-1 \mid -3)$; b) $S(3 \mid -7)$; c) $S(2 \mid 5)$. Bei c) ist a negativ: Aus −4 wird beim Ausmultiplizieren + 8.

3 Fehler finden

Gegeben: Tims Rechnung mit Ergebnis $2(x - 3)^2 + 1$ **Gesucht:** Fehler, richtige Scheitelpunktform
Ansatz: beim Ausmultiplizieren auch −9 mit 2 multiplizieren

Fehler: Beim Auflösen der äußeren Klammer hat Tim nur das Quadrat mit 2 multipliziert, das abgezogene −9 aber nicht. Richtig ist $2 \cdot (-9) = -18$.

$f(x) = 2x^2 - 12x + 10$	| 2 ausklammern
$= 2(x^2 - 6x) + 10$	| + 9 − 9 ergänzen
$= 2(x^2 - 6x + 9 - 9) + 10$	| binomische Formel
$= 2((x - 3)^2 - 9) + 10$	| ausmultiplizieren
$= 2(x - 3)^2 - 18 + 10$	| zusammenfassen
$= 2(x - 3)^2 - 8$	

Probe: $2(x - 3)^2 - 8 = 2x^2 - 12x + 18 - 8 = 2x^2 - 12x + 10$ – stimmt. Tims Term ergibt dagegen $2x^2 - 12x + 19$.
Antwort: $f(x) = 2(x - 3)^2 - 8$, $S(3 \mid -8)$.

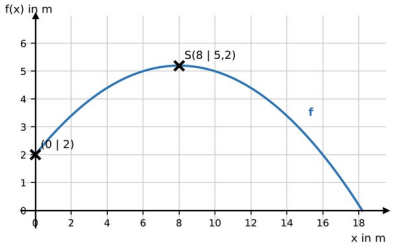
4 Kugelstoß: $f(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}8x + 2$

Gegeben: $f(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}8x + 2$ (x und f(x) in m) **Gesucht:** a) Skizze, b) höchster Punkt S, c) Abstoßhöhe f(0)
Ansatz: b) −0,05 ausklammern (0,8x : (−0,05) = −16x), dann $(-8)^2 = 64$ ergänzen; c) x = 0 einsetzen

b) Höchster Punkt:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}05x^2 + 0{,}8x + 2 && \text{| } -0{,}05 \text{ ausklammern} \\ &= -0{,}05(x^2 - 16x) + 2 && \text{| } + 64 - 64 \text{ ergänzen} \\ &= -0{,}05(x^2 - 16x + 64 - 64) + 2 && \text{| binomische Formel} \\ &= -0{,}05((x-8)^2 - 64) + 2 && \text{| ausmultiplizieren} \\ &= -0{,}05(x-8)^2 + 3{,}2 + 2 && \text{| zusammenfassen} \\ &= -0{,}05(x-8)^2 + 5{,}2 \end{aligned}$$

$f(x) = -0{,}05(x-8)^2 + 5{,}2 \Rightarrow d = 8$ und $e = 5{,}2 \Rightarrow S(8 \mid 5{,}2)$



c) Abstoßhöhe:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}05x^2 + 0{,}8x + 2 && \text{| } x = 0 \text{ einsetzen} \\ f(0) &= -0{,}05 \cdot 0^2 + 0{,}8 \cdot 0 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Antwort: b) 8 m nach dem Abstoß erreicht die Kugel mit 5,2 m ihren höchsten Punkt. c) Die Kugel verlässt die Hand in 2 m Höhe.

5 Welche Funktion stimmt mit f überein?

Gegeben: $f(x) = 2x^2 + 8x + 3$; $g(x) = 2(x+2)^2 - 5$; $h(x) = 2(x+2)^2 + 3$ **Gesucht:** die Funktion, die gleich f ist
Ansatz: f in Scheitelpunktform bringen und vergleichen

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 8x + 3 && \text{| 2 ausklammern} \\ &= 2(x^2 + 4x) + 3 && \text{| } + 4 - 4 \text{ ergänzen} \\ &= 2(x^2 + 4x + 4 - 4) + 3 && \text{| binomische Formel} \\ &= 2((x+2)^2 - 4) + 3 && \text{| ausmultiplizieren} \\ &= 2(x+2)^2 - 8 + 3 && \text{| zusammenfassen} \\ &= 2(x+2)^2 - 5 \end{aligned}$$

f(x) = 2(x + 2)² − 5 ist genau g(x). Bei h wurde vergessen, die Ergänzung wieder abzuziehen; Kontrolle:
h(0) = 2 · 2² + 3 = 11, aber f(0) = 3.
Antwort: f stimmt mit g überein, nicht mit h.

6 $f(x) = 2x^2 - 8x + c$

Gegeben: $f(x) = 2x^2 - 8x + c$ **Gesucht:** a) S in Abhängigkeit von c, b) c mit S auf der x-Achse, c) c ohne Schnittpunkte
Ansatz: a) 2 ausklammern, 4 ergänzen; b) e = 0; c) Öffnung und Lage von S

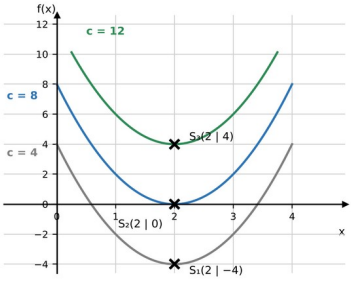
a) Scheitelpunkt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x + c && \text{| 2 ausklammern} \\ &= 2(x^2 - 4x) + c && \text{| } + 4 - 4 \text{ ergänzen} \\ &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + c && \text{| binomische Formel} \\ &= 2((x-2)^2 - 4) + c && \text{| ausmultiplizieren} \\ &= 2(x-2)^2 - 8 + c \end{aligned}$$

$f(x) = 2(x-2)^2 + (c-8) \Rightarrow d = 2$ und $e = c - 8 \Rightarrow S(2 \mid c-8)$

b) S auf der x-Achse:

$$\begin{aligned} c - 8 &= 0 && \text{| } + 8 \\ c &= 8 \end{aligned}$$



c) Keine Schnittpunkte:

a = 2 > 0: Die Parabel ist nach oben geöffnet. Liegt S oberhalb der x-Achse (c − 8 > 0, also c > 8), schneidet der Graph die x-Achse nicht.
Antwort: a) S(2 | c − 8); b) c = 8; c) für c > 8.