Lösungsblatt

Stunde 7 · Wurzelziehen: Nullstellen aus $x^2 = c$ und $a(x - d)^2 + e = 0$ · zur Selbstkontrolle

Mitmachen

a) $f(x) = x^2 - 25$

Gegeben: $f(x) = x^2 - 25$ **Gesucht:** Nullstellen
Ansatz: $f(x) = 0$ setzen, nach x^2 auflösen, Wurzel ziehen

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 25 && \mid f(x) = 0 \text{ setzen} \\ 0 &= x^2 - 25 && \mid + 25 \\ 25 &= x^2 && \mid \text{Wurzel } (\pm) \\ x &= -5 \text{ oder } x = 5 \end{aligned}$$

Antwort: Nullstellen $x_1 = -5$; $x_2 = 5$. Probe: $f(5) = 25 - 25 = 0$.

b) $g(x) = 2(x + 1)^2 - 8$

Gegeben: $g(x) = 2(x + 1)^2 - 8$ **Gesucht:** Schnittpunkte mit der x-Achse
Ansatz: $g(x) = 0$ setzen, nach $(x + 1)^2$ auflösen, Wurzel ziehen, $- 1$

$$\begin{aligned} g(x) &= 2(x + 1)^2 - 8 && \mid g(x) = 0 \text{ setzen} \\ 0 &= 2(x + 1)^2 - 8 && \mid + 8 \\ 8 &= 2(x + 1)^2 && \mid : 2 \\ 4 &= (x + 1)^2 && \mid \text{Wurzel } (\pm) \\ x + 1 &= -2 \text{ oder } x + 1 = 2 && \mid - 1 \\ x &= -3 \text{ oder } x = 1 \end{aligned}$$

Antwort: Schnittpunkte $(-3 \mid 0)$ und $(1 \mid 0)$. Probe: $g(1) = 2 \cdot 4 - 8 = 0$.

Übungen

1 Gleichungen lösen

Gegeben: vier Gleichungen **Gesucht:** alle Lösungen
Ansatz: nach x^2 auflösen, dann Wurzel ziehen $(\pm)$

a) $x^2 = 36 \Rightarrow x_1 = -6$; $x_2 = 6$
b) $x^2 - 2 = 7 \mid + 2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = -3$; $x_2 = 3$
c) $3x^2 = 48 \mid : 3 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x_1 = -4$; $x_2 = 4$
d) $x^2 + 4 = 0 \mid - 4 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow$ keine Lösung (ein Quadrat ist nie negativ)

2 Nullstellen und Schnittpunkte mit der x-Achse

Gegeben: drei Funktionen in Scheitelpunktform **Gesucht:** Nullstellen, Schnittpunkte $(x \mid 0)$
Ansatz: $f(x) = 0$ setzen, nach dem Quadrat auflösen, Wurzel ziehen, + d

a) $f(x) = (x - 2)^2 - 9$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 2)^2 - 9 && \mid f(x) = 0 \text{ setzen} \\ 0 &= (x - 2)^2 - 9 && \mid + 9 \\ 9 &= (x - 2)^2 && \mid \text{Wurzel } (\pm) \\ x - 2 &= -3 \text{ oder } x - 2 = 3 && \mid + 2 \\ x &= -1 \text{ oder } x = 5 \end{aligned}$$

Schnittpunkte $(-1 \mid 0)$ und $(5 \mid 0)$.

b) $f(x) = 0{,}5(x + 3)^2 - 2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}5(x + 3)^2 - 2 && \mid f(x) = 0 \text{ setzen} \\ 0 &= 0{,}5(x + 3)^2 - 2 && \mid + 2 \\ 2 &= 0{,}5(x + 3)^2 && \mid : 0{,}5 \\ 4 &= (x + 3)^2 && \mid \text{Wurzel } (\pm) \\ x + 3 &= -2 \text{ oder } x + 3 = 2 && \mid - 3 \\ x &= -5 \text{ oder } x = -1 \end{aligned}$$

Schnittpunkte $(-5 \mid 0)$ und $(-1 \mid 0)$.

c) $f(x) = -(x - 1)^2 + 16$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x - 1)^2 + 16 && \mid f(x) = 0 \text{ setzen} \\ 0 &= -(x - 1)^2 + 16 && \mid - 16 \\ -16 &= -(x - 1)^2 && \mid : (-1) \\ 16 &= (x - 1)^2 && \mid \text{Wurzel } (\pm) \\ x - 1 &= -4 \text{ oder } x - 1 = 4 && \mid + 1 \\ x &= -3 \text{ oder } x = 5 \end{aligned}$$

Schnittpunkte $(-3 \mid 0)$ und $(5 \mid 0)$.
Antwort: a) $x_1 = -1$; $x_2 = 5$ · b) $x_1 = -5$; $x_2 = -1$ · c) $x_1 = -3$; $x_2 = 5$. Die Nullstellen liegen immer symmetrisch zu $x = d$.

3 Anzahl der Lösungen

Gegeben: vier Gleichungen in Scheitelpunktform **Gesucht:** Anzahl der Lösungen mit Begründung
Ansatz: nach dem Quadrat auflösen: rechte Seite positiv, null oder negativ?

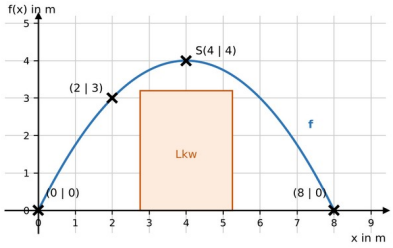
a) $(x - 4)^2 = 0$: **eine** Lösung, denn nur $0^2 = 0$ $(x = 4)$.
b) $(x + 1)^2 + 3 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = -3$: **keine** Lösung, ein Quadrat ist nie negativ.
c) $2(x - 1)^2 - 6 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 3$: **zwei** Lösungen, denn $3 > 0$ $(x = 1 \pm \sqrt{3})$.
d) $-(x - 2)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = -1$: **keine** Lösung.

4 Torbogen: $f(x) = -0{,}25(x-4)^2 + 4$

Gegeben: $f(x) = -0{,}25(x-4)^2 + 4$ (x und $f(x)$ in m) **Gesucht:** a) Breite am Boden, b) $f(2)$, c) Höhe bei $x = 2{,}75$
Ansatz: a) $f(x) = 0$ setzen; b) und c) einsetzen

a) Breite am Boden:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}25(x-4)^2 + 4 && \mid f(x) = 0 \text{ setzen} \\ 0 &= -0{,}25(x-4)^2 + 4 && \mid -4 \\ -4 &= -0{,}25(x-4)^2 && \mid :(-0{,}25) \\ 16 &= (x-4)^2 && \mid \text{Wurzel } (\pm) \\ x-4 &= -4 \text{ oder } x-4 = 4 && \mid +4 \\ x &= 0 \text{ oder } x = 8 \end{aligned}$$



b) Höhe bei $x = 2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}25(x-4)^2 + 4 && \mid x = 2 \text{ einsetzen} \\ f(2) &= -0{,}25 \cdot (2-4)^2 + 4 \\ &= -0{,}25 \cdot 4 + 4 = 3 \end{aligned}$$

c) Höhe am Lkw-Rand:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}25(x-4)^2 + 4 && \mid x = 2{,}75 \text{ einsetzen} \\ f(2{,}75) &= -0{,}25 \cdot (2{,}75-4)^2 + 4 \\ &= -0{,}25 \cdot 1{,}5625 + 4 \approx 3{,}61 \end{aligned}$$

Antwort: a) Fußpunkte (0 | 0) und (8 | 0): Der Bogen ist 8 m breit. b) 2 m vom Fußpunkt ist der Bogen 3 m hoch. c) Ein mittiger Lkw von 2,5 m Breite reicht von $x = 2{,}75$ bis $x = 5{,}25$; dort ist der Bogen $\approx 3{,}61$ m hoch, also höher als 3,2 m – der Lkw passt.

5 Leas Lösung

Gegeben: $(x-3)^2 = 16$, Leas Ergebnis $x = 7$ **Gesucht:** alle Lösungen, Probe
Ansatz: beim Wurzelziehen beide Vorzeichen

Lea hat beim Wurzelziehen das **negative** Vorzeichen übersehen: Auch $(-4)^2 = 16$.

$$\begin{aligned} (x-3)^2 &= 16 && \mid \text{Wurzel } (\pm) \\ x-3 &= -4 \text{ oder } x-3 = 4 && \mid +3 \\ x &= -1 \text{ oder } x = 7 \end{aligned}$$

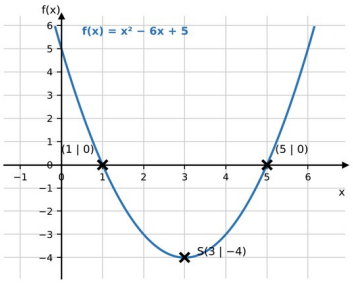
Probe: $(-1-3)^2 = (-4)^2 = 16$ und $(7-3)^2 = 4^2 = 16$ – beide stimmen.
Antwort: $x_1 = -1$; $x_2 = 7$.

6 $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Gegeben: $f(x) = x^2 - 6x + 5$; $g(x) = x^2 - 6x + c$ **Gesucht:** a) Scheitelpunktform, Nullstellen; b) c für genau eine Nullstelle
Ansatz: a) quadratische Ergänzung mit 9, dann $f(x) = 0$; b) S muss auf der x-Achse liegen

a) Scheitelpunktform und Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 5 && \mid +9-9 \text{ ergänzen} \\ &= x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 && \mid \text{binomische Formel} \\ &= (x-3)^2 - 4 \\ 0 &= (x-3)^2 - 4 && \mid +4 \\ 4 &= (x-3)^2 && \mid \text{Wurzel } (\pm) \\ x-3 &= -2 \text{ oder } x-3 = 2 && \mid +3 \\ x &= 1 \text{ oder } x = 5 \end{aligned}$$



b) $g(x) = (x-3)^2 + (c-9)$, also $S(3 \mid c-9)$. Genau eine Nullstelle gibt es, wenn S auf der x-Achse liegt: $c - 9 = 0$, also $c = 9$. Dann ist $g(x) = (x-3)^2$ mit der Nullstelle $x = 3$.
Antwort: a) $f(x) = (x-3)^2 - 4$, $S(3 \mid -4)$, Nullstellen $x_1 = 1$; $x_2 = 5$. b) $c = 9$.