Lösungsblatt

Stunde 8 · Die p-q-Formel: quadratische Gleichungen lösen · zur Selbstkontrolle

Mitmachen

a) $x^2 - 2x - 8 = 0$

Gegeben: $x^2 - 2x - 8 = 0$ **Gesucht:** Lösungen

Ansatz: $p = -2$; $q = -8$ in die p-q-Formel einsetzen

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2x - 8 && \mid \text{p-q-Formel} \\ x_{1,2} &= -p/2 \pm \sqrt{((p/2)^2 - q)} && \mid p = -2;\ q = -8 \text{ einsetzen} \\ x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{(1 + 8)} = 1 \pm 3 \\ x_1 &= 1 - 3 = -2;\ x_2 = 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

Antwort: $x_1 = -2$; $x_2 = 4$. Probe: $4^2 - 2 \cdot 4 - 8 = 0$.

b) $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Gegeben: $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$ **Gesucht:** Nullstellen

Ansatz: $f(x) = 0$ setzen, durch 3 teilen, p-q-Formel

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 12x + 9 && \mid f(x) = 0 \text{ setzen} \\ 0 &= 3x^2 - 12x + 9 && \mid : 3 \\ 0 &= x^2 - 4x + 3 && \mid p = -4;\ q = 3 \text{ einsetzen} \\ x_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{(4 - 3)} = 2 \pm 1 \\ x_1 &= 2 - 1 = 1;\ x_2 = 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Antwort: Nullstellen $x_1 = 1$; $x_2 = 3$, Schnittpunkte (1 | 0) und (3 | 0).

Übungen

1 p und q ablesen

Gegeben: vier Gleichungen **Gesucht:** Normalform, p und q

Ansatz: alles auf eine Seite, bei $a \neq 1$ durch a teilen, Vorzeichen mitnehmen

a) $x^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow p = 8;\ q = -9$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow p = -5;\ q = 6$

c) $2x^2 - 6x + 4 = 0 \mid : 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0,\ p = -3;\ q = 2$

d) $x^2 = 3x + 10 \mid - 3x - 10 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0,\ p = -3;\ q = -10$

2 Lösen mit der p-q-Formel

Gegeben: vier Gleichungen in Normalform **Gesucht:** alle Lösungen

Ansatz: p und q einsetzen, zuerst den Wert unter der Wurzel berechnen

a) $x^2 + 8x - 9 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 8x - 9 && \mid p = 8;\ q = -9 \text{ einsetzen} \\ x_{1,2} &= -4 \pm \sqrt{(16 + 9)} = -4 \pm 5 \\ x_1 &= -9;\ x_2 = 1 \end{aligned}$$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 5x + 6 && \mid p = -5;\ q = 6 \text{ einsetzen} \\ x_{1,2} &= 2{,}5 \pm \sqrt{(6{,}25 - 6)} && \mid \text{zusammenfassen} \\ x_{1,2} &= 2{,}5 \pm \sqrt{0{,}25} = 2{,}5 \pm 0{,}5 \\ x_1 &= 2;\ x_2 = 3 \end{aligned}$$

c) $x^2 + 4x + 5 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 4x + 5 && \mid p = 4;\ q = 5 \text{ einsetzen} \\ x_{1,2} &= -2 \pm \sqrt{(4 - 5)} = -2 \pm \sqrt{(-1)} \end{aligned}$$

Der Wert unter der Wurzel ist negativ: **keine Lösung**.

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 6x + 9 && \mid p = -6;\ q = 9 \text{ einsetzen} \\ x_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{(9 - 9)} = 3 \pm 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Der Wert unter der Wurzel ist 0: **eine Lösung** $x = 3$.

3 Nullstellen und Schnittpunkte

Gegeben: $f(x) = 2x^2 - 8x - 10$; $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ **Gesucht:** Nullstellen, Schnittpunkte (x | 0)

Ansatz: $f(x) = 0$ setzen, durch a teilen, p-q-Formel

a) $f(x) = 2x^2 - 8x - 10$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x - 10 && \mid f(x) = 0 \text{ setzen} \\ 0 &= 2x^2 - 8x - 10 && \mid : 2 \\ 0 &= x^2 - 4x - 5 && \mid p = -4;\ q = -5 \text{ einsetzen} \\ x_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{(4 + 5)} = 2 \pm 3 \\ x_1 &= -1;\ x_2 = 5 \end{aligned}$$

Schnittpunkte (−1 | 0) und (5 | 0).

b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 2x + 3 && \mid f(x) = 0 \text{ setzen} \\ 0 &= -x^2 + 2x + 3 && \mid : (-1) \\ 0 &= x^2 - 2x - 3 && \mid p = -2;\ q = -3 \text{ einsetzen} \\ x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{(1 + 3)} = 1 \pm 2 \\ x_1 &= -1;\ x_2 = 3 \end{aligned}$$

Schnittpunkte (−1 | 0) und (3 | 0).

4 Bens Fehler

Gegeben: $x^2 + 6x - 7 = 0$, Bens Rechnung **Gesucht:** Fehler, richtige Lösungen

Ansatz: $p = 6$; $q = -7$ mit Vorzeichen einsetzen

1. Fehler: $-p/2 = -3$, nicht 3 (das Vorzeichen von p wird umgedreht).
2. Fehler: $-q = -(-7) = +7$, unter der Wurzel steht also $9 + 7$, nicht $9 - 7$.

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 6x - 7 && \mid p = 6;\ q = -7 \text{ einsetzen} \\ x_{1,2} &= -3 \pm \sqrt{(9 + 7)} = -3 \pm 4 \\ x_1 &= -7;\ x_2 = 1 \end{aligned}$$

Antwort: $x_1 = -7$; $x_2 = 1$. Probe: $1^2 + 6 \cdot 1 - 7 = 0$.

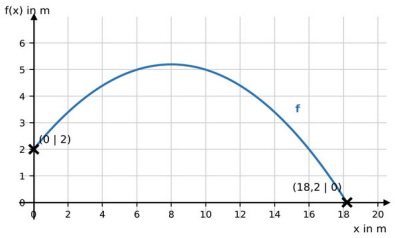
5 Kugelstoß: f(x) = −0,05x² + 0,8x + 2

Gegeben: f(x) = −0,05x² + 0,8x + 2 (x und f(x) in m) **Gesucht:** a) Begründung, b) Stoßweite, c) nicht sinnvolle Lösung
Ansatz: f(x) = 0 setzen, durch −0,05 teilen, p-q-Formel

a) Die Kugel landet auf dem Boden, dort ist die Höhe f(x) = 0.

b) Stoßweite:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -0{,}05x^2 + 0{,}8x + 2 && \mid f(x) = 0 \text{ setzen}\\
0 &= -0{,}05x^2 + 0{,}8x + 2 && \mid : (-0{,}05)\\
0 &= x^2 - 16x - 40 && \mid p = -16;\ q = -40\\
x_{1,2} &= 8 \pm \sqrt{(64 + 40)} = 8 \pm \sqrt{104}\\
x_1 &= 8 - \sqrt{104} \approx -2{,}20\\
x_2 &= 8 + \sqrt{104} \approx 18{,}20
\end{aligned}
$$



Antwort: b) Die Stoßweite beträgt etwa 18,20 m. c) $x_1 \approx -2{,}20$ liegt hinter dem Abstoß – die Kugel fliegt nur nach vorn, diese Lösung ist nicht sinnvoll.

6 Rechteckiges Beet

Gegeben: Länge = Breite + 3 m, Fläche 40 m² **Gesucht:** a) Gleichung, b) Breite und Länge
Ansatz: Fläche = Breite · Länge: x · (x + 3) = 40

a) Gleichung aufstellen:

$$
\begin{aligned}
x \cdot (x + 3) &= 40 && \mid \text{ausmultiplizieren}\\
x^2 + 3x &= 40 && \mid - 40\\
x^2 + 3x - 40 &= 0 && \mid p = 3;\ q = -40
\end{aligned}
$$

b) Lösen:

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= -1{,}5 \pm \sqrt{(2{,}25 + 40)} && \mid \text{einsetzen}\\
x_{1,2} &= -1{,}5 \pm \sqrt{42{,}25} = -1{,}5 \pm 6{,}5\\
x_1 &= -8;\ x_2 = 5
\end{aligned}
$$

Antwort: Eine Breite kann nicht negativ sein, also x = 5: Das Beet ist 5 m breit und 8 m lang. Probe: 5 · 8 = 40.