Lösungsblatt

Stunde 11 · Schnittpunkte von Gerade und Parabel · zur Selbstkontrolle

Mitmachen

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$; $g(x) = x + 1$

Gegeben: $f(x) = x^2 - 4x + 5$; $g(x) = x + 1$ **Gesucht:** Schnittpunkte

Ansatz: $f(x) = g(x)$, p-q-Formel, x in g(x) einsetzen

$x^2 - 4x + 5 = x + 1$ | − x

$x^2 - 5x + 5 = 1$ | − 1

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Rightarrow p = -5;\ q = 4$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ | p = −5 und q = 4 einsetzen

$x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4}$ | zusammenfassen

$x_{1,2} = 2{,}5 \pm 1{,}5$

$x_1 = 1;\ x_2 = 4$

$g(x) = x + 1$ | x = 1 einsetzen

$g(1) = 1 + 1 = 2$

$g(x) = x + 1$ | x = 4 einsetzen

$g(4) = 4 + 1 = 5$

Antwort: Schnittpunkte (1 | 2) und (4 | 5).

b) $f(x) = x^2 + 3$; $g(x) = 2x + 1$

Gegeben: $f(x) = x^2 + 3$; $g(x) = 2x + 1$ **Gesucht:** Anzahl gemeinsamer Punkte

Ansatz: $f(x) = g(x)$, Normalform, D berechnen

$x^2 + 3 = 2x + 1$ | − 2x

$x^2 - 2x + 3 = 1$ | − 1

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$\Rightarrow p = -2;\ q = 2$

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ | p = −2 und q = 2 einsetzen

$D = (-1)^2 - 2 = -1$ | D < 0

Antwort: D < 0: Gerade und Parabel haben keinen gemeinsamen Punkt.

Übungen

1 Schnittpunkte berechnen

Gegeben: f und g **Gesucht:** Schnittpunkte

Ansatz: $f(x) = g(x)$, lösen, x in g(x) einsetzen

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = x + 2$:

$x^2 = x + 2$ | − x

$x^2 - x = 2$ | − 2

$x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow p = -1;\ q = -2$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ | p = −1 und q = −2 einsetzen

$x_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 2}$ | zusammenfassen

$x_{1,2} = 0{,}5 \pm 1{,}5$

$x_1 = -1;\ x_2 = 2$

$g(x) = x + 2$ | x = −1 einsetzen

$g(-1) = -1 + 2 = 1$

$g(x) = x + 2$ | x = 2 einsetzen

$g(2) = 2 + 2 = 4$

Antwort: (−1 | 1) und (2 | 4).

b) $f(x) = x^2 - 3$; $g(x) = 2x$:

$x^2 - 3 = 2x$ | − 2x

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow p = -2;\ q = -3$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ | p = −2 und q = −3 einsetzen

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 3}$ | zusammenfassen

$x_{1,2} = 1 \pm 2$

$x_1 = -1;\ x_2 = 3$

$g(x) = 2x$ | x = −1 einsetzen

$g(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$

$g(x) = 2x$ | x = 3 einsetzen

$g(3) = 2 \cdot 3 = 6$

Antwort: (−1 | −2) und (3 | 6).

c) $f(x) = x^2 + 2x$; $g(x) = 2x + 9$:

$x^2 + 2x = 2x + 9$ | − 2x

$x^2 = 9$ | Wurzel ziehen (±)

$x_1 = -3;\ x_2 = 3$

$g(x) = 2x + 9$ | x = −3 einsetzen

$g(-3) = -6 + 9 = 3$

$g(x) = 2x + 9$ | x = 3 einsetzen

$g(3) = 6 + 9 = 15$

Antwort: (−3 | 3) und (3 | 15).

2 Anzahl gemeinsamer Punkte

Gegeben: f und g **Gesucht:** Anzahl gemeinsamer Punkte
Ansatz: f(x) = g(x), Normalform, D berechnen

a) f(x) = x² − 2x + 3; g(x) = 2x − 1:

$x^2 - 2x + 3 = 2x - 1$ | − 2x
$x^2 - 4x + 3 = -1$ | + 1
$x^2 - 4x + 4 = 0$
$\Rightarrow p = -4;\ q = 4$
$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ | p = −4 und q = 4 einsetzen
$D = (-2)^2 - 4 = 0$ | D = 0: ein Berührpunkt

b) f(x) = x² + x; g(x) = −x − 2:

$x^2 + x = -x - 2$ | + x
$x^2 + 2x = -2$ | + 2
$x^2 + 2x + 2 = 0$
$\Rightarrow p = 2;\ q = 2$
$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ | p = 2 und q = 2 einsetzen
$D = 1^2 - 2 = -1$ | D < 0: kein Punkt

c) f(x) = x² − 1; g(x) = 3x + 3:

$x^2 - 1 = 3x + 3$ | − 3x
$x^2 - 3x - 1 = 3$ | − 3
$x^2 - 3x - 4 = 0$
$\Rightarrow p = -3;\ q = -4$
$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ | p = −3 und q = −4 einsetzen
$D = (-1{,}5)^2 - (-4) = 6{,}25$ | D > 0: zwei Schnittpunkte

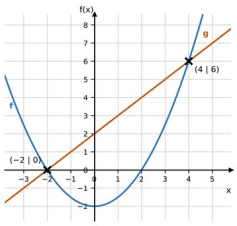
Antwort: a) ein Berührpunkt · b) kein gemeinsamer Punkt · c) zwei Schnittpunkte.

3 f(x) = 0,5x² − 2; g(x) = x + 2

Gegeben: f(x) = 0,5x² − 2; g(x) = x + 2 **Gesucht:** Schnittpunkte (zeichnerisch und rechnerisch)
Ansatz: a) Wertetabelle, zeichnen, ablesen; b) f(x) = g(x), erst durch 0,5 teilen

b) Rechnung:

$0{,}5x^2 - 2 = x + 2$ | − x
$0{,}5x^2 - x - 2 = 2$ | − 2
$0{,}5x^2 - x - 4 = 0$ | : 0,5
$x^2 - 2x - 8 = 0$
$\Rightarrow p = -2;\ q = -8$
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ | p = −2 und q = −8 einsetzen
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 8}$ | zusammenfassen
$x_{1,2} = 1 \pm 3$
$x_1 = -2;\ x_2 = 4$
$g(x) = x + 2$ | x = −2 einsetzen
$g(-2) = -2 + 2 = 0$
$g(x) = x + 2$ | x = 4 einsetzen
$g(4) = 4 + 2 = 6$



Antwort: a) und b): Schnittpunkte (−2 | 0) und (4 | 6). Die Rechnung bestätigt die abgelesenen Werte; beim Ablesen sind nur ganzzahlige Werte sicher.

4 Toms Fehler

Tom hat die Schnittstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ richtig berechnet, aber als zweite Koordinate 0 geschrieben. 0 ist der Wert der Differenz f(x) − g(x), nicht der Funktionswert. Er muss die Stellen in g(x) (oder f(x)) einsetzen.

$g(x) = 2x + 4$ | x = −1 einsetzen
$g(-1) = 2 \cdot (-1) + 4 = 2$
$g(x) = 2x + 4$ | x = 3 einsetzen
$g(3) = 2 \cdot 3 + 4 = 10$

Antwort: Die Schnittpunkte sind (−1 | 2) und (3 | 10). Probe: f(−1) = 2; f(3) = 10.

5 Golfball am Hang: f(x) = −0,1x² + 2x; g(x) = 0,5x

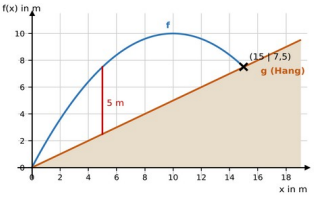
Gegeben: f(x) = −0,1x² + 2x; g(x) = 0,5x (x und f(x) in m) **Gesucht:** a) Schnittpunkt mit x > 0; b) f(5) − g(5)
Ansatz: a) f(x) = g(x), x ausklammern, x in g(x) einsetzen; b) beide Funktionswerte berechnen, Differenz

a) Auftreffpunkt:

$-0{,}1x^2 + 2x = 0{,}5x$ | − 0,5x
$-0{,}1x^2 + 1{,}5x = 0$ | x ausklammern
$x \cdot (-0{,}1x + 1{,}5) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 0$ oder $-0{,}1x + 1{,}5 = 0$ | − 1,5
$-0{,}1x = -1{,}5$ | : (−0,1)
$x_2 = 15$
$g(x) = 0{,}5x$ | x = 15 einsetzen
$g(15) = 0{,}5 \cdot 15 = 7{,}5$

b) Höhe über dem Hang bei x = 5:

$f(x) = -0{,}1x^2 + 2x$ | x = 5 einsetzen
$f(5) = -0{,}1 \cdot 25 + 10 = 7{,}5$
$g(x) = 0{,}5x$ | x = 5 einsetzen
$g(5) = 0{,}5 \cdot 5 = 2{,}5$



Antwort: a) Der Ball trifft 15 m (waagerecht) vom Abschlag entfernt in 7,5 m Höhe auf den Hang: (15 | 7,5). b) Bei x = 5 fliegt der Ball 7,5 m − 2,5 m = 5 m über dem Hang.

6 Berührende Ursprungsgeraden an f(x) = x² + 4

Gegeben: f(x) = x² + 4; g(x) = m · x **Gesucht:** a) m mit genau einem gemeinsamen Punkt, Berührpunkte; b) m ohne gemeinsamen Punkt
Ansatz: f(x) = g(x), Normalform mit p = −m, D in Abhängigkeit von m

a) D = 0:

$x^2 + 4 = m \cdot x$ | − m · x
$x^2 - mx + 4 = 0$
$\Rightarrow p = -m;\ q = 4$
$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ | p = −m und q = 4 einsetzen
$D = \frac{m^2}{4} - 4$ | D = 0 setzen
$0 = \frac{m^2}{4} - 4$ | + 4
$4 = \frac{m^2}{4}$ | · 4
$16 = m^2$ | Wurzel ziehen (±)
$m_1 = -4;\ m_2 = 4$

Berührpunkte:

$x = -\frac{p}{2}$ | p = −m einsetzen
$x = \frac{m}{2}$ | m = 4 bzw. m = −4 einsetzen
$x_1 = 2;\ x_2 = -2$
$g(2) = 4 \cdot 2 = 8$
$g(-2) = -4 \cdot (-2) = 8$

Antwort: a) Für m = 4 und m = −4 berührt die Gerade die Parabel, in (2 | 8) bzw. (−2 | 8). b) Kein gemeinsamer Punkt, wenn D < 0 ist, also für −4 < m < 4.