KOPERNIKUS OBERSCHULE	**Mathematik 11**	Name: Datum:

Schnittpunkte zweier Parabeln

Merke: Schnittpunkte zweier Parabeln

1. Gleichsetzen: f(x) = g(x) – an einem Schnittpunkt haben beide Parabeln denselben Funktionswert.
2. Alles auf eine Seite bringen; steht $2x^2$, erst durch 2 teilen ⇒ Normalform, dann lösen ⇒ Schnittstellen x_1, x_2.
3. Jede Schnittstelle in f(x) (oder g(x)) einsetzen ⇒ Schnittpunkte (x | f(x)).
Sonderfall: gleicher Faktor vor x^2 ⇒ x^2 fällt weg ⇒ lineare Gleichung, höchstens ein Schnittpunkt.

D > 0 ⇒ zwei Schnittpunkte	**D = 0** ⇒ ein Berührpunkt	**D < 0** ⇒ kein gemeinsamer Punkt

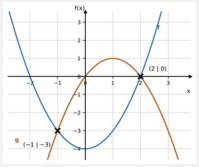
Beispiele

B1 Schnittpunkte berechnen

Aufgabe: Berechnen Sie die Schnittpunkte von $f(x) = x^2 - 4$ und $g(x) = -x^2 + 2x$.
Gegeben: $f(x) = x^2 - 4$; $g(x) = -x^2 + 2x$ **Gesucht:** Schnittpunkte
Ansatz: f(x) = g(x) setzen, durch 2 teilen, p-q-Formel, x in f(x) einsetzen

Schnittstellen:

$x^2 - 4 = -x^2 + 2x$ | + x^2
$2x^2 - 4 = 2x$ | − 2x
$2x^2 - 2x - 4 = 0$ | : 2
$x^2 - x - 2 = 0$
$\Rightarrow p = -1;\ q = -2$
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ | p = −1 und q = −2 einsetzen
$x_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 2}$ | zusammenfassen
$x_{1,2} = 0{,}5 \pm 1{,}5$
$x_1 = -1;\ x_2 = 2$



Funktionswerte:

$f(x) = x^2 - 4$ | x = −1 einsetzen
$f(-1) = (-1)^2 - 4 = -3$
$f(x) = x^2 - 4$ | x = 2 einsetzen
$f(2) = 2^2 - 4 = 0$

Antwort: Die Parabeln schneiden sich in (−1 | −3) und (2 | 0). Probe mit g: g(−1) = −1 − 2 = −3; g(2) = −4 + 4 = 0.

B2 Wie viele gemeinsame Punkte?

Aufgabe: Wie viele gemeinsame Punkte hat $f(x) = 2x^2 + 1$ mit $g(x) = x^2 + 2x$ und mit $h(x) = x^2 + 2x - 2$?
Gegeben: $f(x) = 2x^2 + 1$; $g(x) = x^2 + 2x$; $h(x) = x^2 + 2x - 2$ **Gesucht:** Anzahl der gemeinsamen Punkte
Ansatz: gleichsetzen, auf Normalform bringen, D berechnen

f(x) = g(x):

$2x^2 + 1 = x^2 + 2x$ | − x^2
$x^2 + 1 = 2x$ | − 2x
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$\Rightarrow p = -2;\ q = 1$
$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ | p = −2 und q = 1 einsetzen
$D = (-1)^2 - 1 = 0$ | D = 0
$x = -\frac{p}{2} = 1$ | p = −2 einsetzen

f(x) = h(x):

$2x^2 + 1 = x^2 + 2x - 2$ | − x^2
$x^2 + 1 = 2x - 2$ | − 2x
$x^2 - 2x + 1 = -2$ | + 2
$x^2 - 2x + 3 = 0$
$\Rightarrow p = -2;\ q = 3$
$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ | p = −2 und q = 3 einsetzen
$D = (-1)^2 - 3 = -2$ | D < 0

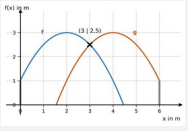
Antwort: g berührt f bei x = 1 im Punkt (1 | 3), denn f(1) = 2 + 1 = 3; h hat mit f keinen gemeinsamen Punkt.

B3 Springbrunnen

Aufgabe: Zwei gleiche Düsen stehen sich in 6 m Abstand gegenüber, 1 m über dem Wasser. Strahl 1: $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 1$, Strahl 2: $g(x) = -0{,}5x^2 + 4x - 5$ (x: Entfernung von Düse 1 in m, f(x), g(x): Höhe in m). Wo kreuzen sich die Strahlen?
Gegeben: $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 1$; $g(x) = -0{,}5x^2 + 4x - 5$ **Gesucht:** Schnittpunkt
Ansatz: f(x) = g(x) setzen; gleicher Faktor vor x^2 ⇒ x^2 fällt weg, lineare Gleichung; x in f(x) einsetzen

$-0{,}5x^2 + 2x + 1 = -0{,}5x^2 + 4x - 5$ | + $0{,}5x^2$
$2x + 1 = 4x - 5$ | − 2x
$1 = 2x - 5$ | + 5
$6 = 2x$ | : 2
$3 = x$

$f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 1$ | x = 3 einsetzen
$f(3) = -0{,}5 \cdot 9 + 6 + 1 = 2{,}5$



Antwort: Die Strahlen kreuzen sich in (3 | 2,5): 3 m von Düse 1 entfernt in 2,5 m Höhe – genau in der Mitte zwischen den Düsen.

Mitmachen

a) Berechnen Sie die Schnittpunkte von $f(x) = x^2 + 2x$ und $g(x) = -x^2 + 4$.

b) Wie viele gemeinsame Punkte haben $f(x) = x^2 + 3$ und $g(x) = -x^2 + 2x$?

Übungen

★ **1** Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen von f und g.

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = -x^2 + 8$ b) $f(x) = x^2 + 2x$; $g(x) = -x^2 + 4x$ c) $f(x) = x^2 - 4x + 5$; $g(x) = -x^2 + 2x + 1$

★ **2** Bestimmen Sie mit der Diskriminante, wie viele gemeinsame Punkte die Parabeln haben.

a) $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = -x^2 + 2x$ b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$; $g(x) = x^2 - 2x + 2$ c) $f(x) = x^2 - 2$; $g(x) = -x^2 + x$

★★ **3** Gegeben sind $f(x) = 0{,}5x^2 - 2$ und $g(x) = -0{,}5x^2 + x + 4$.

a) Zeichnen Sie beide Graphen für $-3 \le x \le 4$ in ein Koordinatensystem (1 Kästchen = 1 Einheit) und lesen Sie die Schnittpunkte ab.

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte und vergleichen Sie mit a).

★★ **4** Lea soll die Schnittpunkte von $f(x) = x^2 + 3$ und $g(x) = -x^2 + 5$ berechnen. Sie schreibt: „$x^2 + 3 = -x^2 + 5$. Auf beiden Seiten steht x^2, das fällt weg: $3 = 5$. Das stimmt nie, also gibt es keinen Schnittpunkt.“ Erklären Sie Leas Fehler und berechnen Sie die Schnittpunkte.

★★ **5** Bei einem Springbrunnen startet Strahl 1 an Düse A am Wasserspiegel: $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x$. Strahl 2 startet 2 m weiter an Düse B: $g(x) = -0{,}5x^2 + 5x - 8$ (x: waagerechte Entfernung von Düse A in m, f(x), g(x): Höhe in m).

a) In welcher Entfernung von Düse A und in welcher Höhe kreuzen sich die beiden Strahlen?

b) Ein dritter Strahl startet 1 m von Düse A entfernt: $h(x) = -x^2 + 6x - 5$. Begründen Sie rechnerisch, dass er Strahl 1 nirgends trifft.

★★★ **6** Gegeben sind die Parabeln $f(x) = x^2 + c$ und $g(x) = -x^2 + 4x$.

a) Für welchen Wert von c berühren sich die Parabeln? Geben Sie den Berührpunkt an.

b) Für welche Werte von c gibt es zwei Schnittpunkte, für welche keinen gemeinsamen Punkt?