Lösungsblatt

Stunde 12 · Schnittpunkte zweier Parabeln · zur Selbstkontrolle

Mitmachen

a) $f(x) = x^2 + 2x$; $g(x) = -x^2 + 4$

Gegeben: $f(x) = x^2 + 2x$; $g(x) = -x^2 + 4$ **Gesucht:** Schnittpunkte

Ansatz: $f(x) = g(x)$, durch 2 teilen, p-q-Formel, x in f(x) einsetzen

$$x^2 + 2x = -x^2 + 4 \quad | + x^2$$
$$2x^2 + 2x = 4 \quad | - 4$$
$$2x^2 + 2x - 4 = 0 \quad | : 2$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow p = 1;\ q = -2$$
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | \text{ p = 1 und q = −2 einsetzen}$$
$$x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 2} \quad | \text{ zusammenfassen}$$
$$x_{1,2} = -0{,}5 \pm 1{,}5$$
$$x_1 = -2;\ x_2 = 1$$
$$f(x) = x^2 + 2x \quad | \text{ x = −2 einsetzen}$$
$$f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = 0$$
$$f(x) = x^2 + 2x \quad | \text{ x = 1 einsetzen}$$
$$f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$$

Antwort: Schnittpunkte (−2 | 0) und (1 | 3).

b) $f(x) = x^2 + 3$; $g(x) = -x^2 + 2x$

Gegeben: $f(x) = x^2 + 3$; $g(x) = -x^2 + 2x$ **Gesucht:** Anzahl gemeinsamer Punkte

Ansatz: $f(x) = g(x)$, durch 2 teilen ⇒ Normalform, D berechnen

$$x^2 + 3 = -x^2 + 2x \quad | + x^2$$
$$2x^2 + 3 = 2x \quad | - 2x$$
$$2x^2 - 2x + 3 = 0 \quad | : 2$$
$$x^2 - x + 1{,}5 = 0$$
$$\Rightarrow p = -1;\ q = 1{,}5$$
$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad | \text{ p = −1 und q = 1,5 einsetzen}$$
$$D = (-0{,}5)^2 - 1{,}5 = -1{,}25 \quad | \text{ D < 0}$$

Antwort: D < 0: Die Parabeln haben keinen gemeinsamen Punkt.

Übungen

1 Schnittpunkte berechnen

Gegeben: f und g **Gesucht:** Schnittpunkte

Ansatz: f(x) = g(x), zusammenfassen, lösen, x in f(x) einsetzen

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = -x^2 + 8$:

$$x^2 = -x^2 + 8 \quad | + x^2$$
$$2x^2 = 8 \quad | : 2$$
$$x^2 = 4 \quad | \text{ Wurzel ziehen (±)}$$
$$x_1 = -2;\ x_2 = 2$$
$$f(x) = x^2 \quad | \text{ x = −2 einsetzen}$$
$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$
$$f(x) = x^2 \quad | \text{ x = 2 einsetzen}$$
$$f(2) = 2^2 = 4$$

Antwort: (−2 | 4) und (2 | 4).

b) $f(x) = x^2 + 2x$; $g(x) = -x^2 + 4x$:

$$x^2 + 2x = -x^2 + 4x \quad | + x^2$$
$$2x^2 + 2x = 4x \quad | - 4x$$
$$2x^2 - 2x = 0 \quad | : 2$$
$$x^2 - x = 0 \quad | \text{ x ausklammern}$$
$$x \cdot (x - 1) = 0 \quad | \text{ Satz vom Nullprodukt}$$
$$x_1 = 0 \text{ oder } x - 1 = 0 \quad | + 1$$
$$x_2 = 1$$
$$f(x) = x^2 + 2x \quad | \text{ x = 0 einsetzen}$$
$$f(0) = 0 + 0 = 0$$
$$f(x) = x^2 + 2x \quad | \text{ x = 1 einsetzen}$$
$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

Antwort: (0 | 0) und (1 | 3).

c) $f(x) = x^2 - 4x + 5$; $g(x) = -x^2 + 2x + 1$:

$$x^2 - 4x + 5 = -x^2 + 2x + 1 \quad | + x^2$$
$$2x^2 - 4x + 5 = 2x + 1 \quad | - 2x$$
$$2x^2 - 6x + 5 = 1 \quad | - 1$$
$$2x^2 - 6x + 4 = 0 \quad | : 2$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$\Rightarrow p = -3;\ q = 2$$
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | \text{ p = −3 und q = 2 einsetzen}$$
$$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 2} \quad | \text{ zusammenfassen}$$
$$x_{1,2} = 1{,}5 \pm 0{,}5$$
$$x_1 = 1;\ x_2 = 2$$
$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \quad | \text{ x = 1 einsetzen}$$
$$f(1) = 1 - 4 + 5 = 2$$
$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \quad | \text{ x = 2 einsetzen}$$
$$f(2) = 4 - 8 + 5 = 1$$

Antwort: (1 | 2) und (2 | 1).

2 Anzahl gemeinsamer Punkte

Gegeben: f und g **Gesucht:** Anzahl gemeinsamer Punkte
Ansatz: f(x) = g(x), Normalform (durch den Faktor vor x² teilen), D berechnen

a) f(x) = x² + 1; g(x) = −x² + 2x:

$x^2 + 1 = -x^2 + 2x$ | + x²
$2x^2 + 1 = 2x$ | − 2x
$2x^2 - 2x + 1 = 0$ | : 2
$x^2 - x + 0{,}5 = 0$
$\Rightarrow p = -1;\ q = 0{,}5$
$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ | p = −1 und q = 0,5 einsetzen
$D = (-0{,}5)^2 - 0{,}5 = -0{,}25$ | D < 0: kein Punkt

b) f(x) = 2x² − 4x + 3; g(x) = x² − 2x + 2:

$2x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2x + 2$ | − x²
$x^2 - 4x + 3 = -2x + 2$ | + 2x
$x^2 - 2x + 3 = 2$ | − 2
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$\Rightarrow p = -2;\ q = 1$
$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ | p = −2 und q = 1 einsetzen
$D = (-1)^2 - 1 = 0$ | D = 0: ein Berührpunkt

c) f(x) = x² − 2; g(x) = −x² + x:

$x^2 - 2 = -x^2 + x$ | + x²
$2x^2 - 2 = x$ | − x
$2x^2 - x - 2 = 0$ | : 2
$x^2 - 0{,}5x - 1 = 0$
$\Rightarrow p = -0{,}5;\ q = -1$
$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ | p = −0,5 und q = −1 einsetzen
$D = (-0{,}25)^2 - (-1) = 1{,}0625$ | D > 0: zwei Schnittpunkte

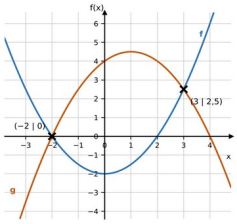
Antwort: a) kein gemeinsamer Punkt · b) ein Berührpunkt (bei x = 1: (1 | 1)) · c) zwei Schnittpunkte.

3 f(x) = 0,5x² − 2; g(x) = −0,5x² + x + 4

Gegeben: f(x) = 0,5x² − 2; g(x) = −0,5x² + x + 4 **Gesucht:** Schnittpunkte (zeichnerisch und rechnerisch)
Ansatz: a) Wertetabellen, zeichnen, ablesen; b) f(x) = g(x), zusammenfassen, p-q-Formel

b) Rechnung:

$0{,}5x^2 - 2 = -0{,}5x^2 + x + 4$ | + 0,5x²
$x^2 - 2 = x + 4$ | − x
$x^2 - x - 2 = 4$ | − 4
$x^2 - x - 6 = 0$
$\Rightarrow p = -1;\ q = -6$
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ | p = −1 und q = −6 einsetzen
$x_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6}$ | zusammenfassen
$x_{1,2} = 0{,}5 \pm 2{,}5$
$x_1 = -2;\ x_2 = 3$
$f(x) = 0{,}5x^2 - 2$ | x = −2 einsetzen
$f(-2) = 0{,}5 \cdot 4 - 2 = 0$
$f(x) = 0{,}5x^2 - 2$ | x = 3 einsetzen
$f(3) = 0{,}5 \cdot 9 - 2 = 2{,}5$



Antwort: a) und b): Schnittpunkte (−2 | 0) und (3 | 2,5). Den Wert 2,5 kann man nur ungefähr ablesen – die Rechnung macht ihn sicher.

4 Leas Fehler

x² fällt nur weg, wenn auf beiden Seiten **derselbe** Term steht. Hier steht links +x² und rechts −x² – die Parabeln sind verschieden geöffnet. Richtig ist: auf beiden Seiten x² addieren, dann bleibt 2x².
Antwort: Die Schnittpunkte sind (−1 | 4) und (1 | 4). Probe: g(−1) = −1 + 5 = 4; g(1) = 4.

$x^2 + 3 = -x^2 + 5$ | + x²
$2x^2 + 3 = 5$ | − 3
$2x^2 = 2$ | : 2
$x^2 = 1$ | Wurzel ziehen (±)
$x_1 = -1;\ x_2 = 1$
$f(x) = x^2 + 3$ | x = −1 einsetzen
$f(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$
$f(x) = x^2 + 3$ | x = 1 einsetzen
$f(1) = 1^2 + 3 = 4$

5 Springbrunnen: $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x$; $g(x) = -0{,}5x^2 + 5x - 8$; $h(x) = -x^2 + 6x - 5$

Gegeben: f, g, h (x und Höhe in m) **Gesucht:** a) Schnittpunkt von f und g; b) Nachweis, dass f und h keinen gemeinsamen Punkt haben

Ansatz: a) f(x) = g(x): gleicher Faktor vor x^2 ⇒ lineare Gleichung, x in f(x) einsetzen; b) f(x) = h(x), Normalform, D berechnen

a) Kreuzungspunkt:

$$\begin{aligned} -0{,}5x^2 + 3x &= -0{,}5x^2 + 5x - 8 && | + 0{,}5x^2 \\ 3x &= 5x - 8 && | - 5x \\ -2x &= -8 && | : (-2) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$f(x) = -0{,}5x^2 + 3x \quad | \ x = 4 \text{ einsetzen}$$

$$f(4) = -0{,}5 \cdot 16 + 12 = 4$$

Antwort: a) Die Strahlen kreuzen sich 4 m von Düse A entfernt in 4 m Höhe: (4 | 4).

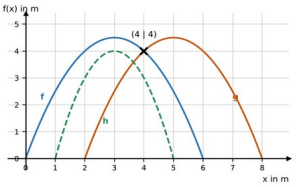
b) f(x) = h(x):

$$\begin{aligned} -0{,}5x^2 + 3x &= -x^2 + 6x - 5 && | + x^2 \\ 0{,}5x^2 + 3x &= 6x - 5 && | - 6x \\ 0{,}5x^2 - 3x &= -5 && | + 5 \\ 0{,}5x^2 - 3x + 5 &= 0 && | : 0{,}5 \\ x^2 - 6x + 10 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p = -6; \ q = 10$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad | \ p = -6 \text{ und } q = 10 \text{ einsetzen}$$

$$D = (-3)^2 - 10 = -1 \quad | \ D < 0$$



Antwort: b) D < 0: Die Gleichung hat keine Lösung, Strahl 3 trifft Strahl 1 nirgends – er bleibt überall unter ihm.

6 Berührende Parabeln: $f(x) = x^2 + c$; $g(x) = -x^2 + 4x$

Gegeben: $f(x) = x^2 + c$; $g(x) = -x^2 + 4x$ **Gesucht:** a) c mit genau einem gemeinsamen Punkt, Berührpunkt; b) c mit zwei bzw. keinem gemeinsamen Punkt

Ansatz: f(x) = g(x), Normalform mit $q = \frac{c}{2}$, D in Abhängigkeit von c

Diskriminante:

$$\begin{aligned} x^2 + c &= -x^2 + 4x && | + x^2 \\ 2x^2 + c &= 4x && | - 4x \\ 2x^2 - 4x + c &= 0 && | : 2 \\ x^2 - 2x + \frac{c}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p = -2; \ q = \frac{c}{2}$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad | \ p = -2 \text{ und } q = \frac{c}{2} \text{ einsetzen}$$

$$D = 1 - \frac{c}{2}$$

a) D = 0:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \frac{c}{2} && | + \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} &= 1 && | \cdot 2 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

Berührpunkt:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{p}{2} && | \ p = -2 \text{ einsetzen} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 + 2 \quad | \ x = 1 \text{ einsetzen}$$

$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

b) D > 0 und D < 0:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{c}{2} &> 0 && | + \frac{c}{2} \\ 1 &> \frac{c}{2} && | \cdot 2 \\ 2 &> c && | \text{ zwei Schnittpunkte für } c < 2 \end{aligned}$$

Antwort: a) Für c = 2 berühren sich die Parabeln im Punkt (1 | 3). b) Zwei Schnittpunkte für c < 2, kein gemeinsamer Punkt für c > 2.